Analiza I_2, kolokwium 4 maja 2010

9:05 — 11:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

0. Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i istnieje taka liczba $M > 0$, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f^{(n)}(x)| \le M$. Wynika stąd, że

- **a.** dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby rzeczywiste a_0, $a_1, \ldots, a_n$, że $f(1+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + r_n(h)$ i granica $\lim_{h\to 0} r_n(h)h^{-n}$ jest skończona;
- **b.** dla każdego $h \in (-1,1)$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} r_n(h) = 0$;
- **c.** dla każdego $n > 10$ zachodzi $\lim_{h\to 0} r_n(h) = 0$.

---

1. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos(\operatorname{tg} x)}{\ln(1+3x^2) - 3\sin^2 x}$.

---

2. Niech $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x)$, jeśli $\frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n}$ i $f_n(x) = 0$ dla $x \notin (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n})$.

Czy szereg $\sum f_n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,1]$?

Czy szereg $\sum \sup\{f_n(x)\colon \quad x \in [0,1]\}$ jest zbieżny?

---

3. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\ln(1+\sin^{2n} x)$ jest zbieżny?

Na jakich przedziałach postaci $[a,b]$, $a < b$, zbieżność jest jednostajna?

Na których z tych przedziałów suma szeregu jest funkcją różniczkowalną?

---

4. Niech $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ dla $x > 1$. Udowodnić, że funkcja ζ jest dobrze zdefiniowana oraz, że jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

---

5. Rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = -1$ funkcję f, jeśli $f(x) = \ln(2+2x+x^2)$. Dla jakich x słuszny jest otrzymany wzór?
